1.3 Die L^2-Theorie

Die zentrale Aussage über die Fouriertransformation von L^2-Funktionen ist der folgende

Satz 3.1 (Fourier-Plancherel): Es gibt einen unitären Isomorphismus $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, so dass für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt $\mathcal{F}_2 f = \hat{f}$.

Erläuterungen: (Bez. später wieder: $\mathcal{F}$ statt $\mathcal{F}_2$, nur zum Beweis dieses Satzes)

(1) Ist H ein Hilbertraum und $A \in L(H)$, so heißt $A^* : H \to H$, def. durch $\langle A^* x, y \rangle := \langle x, Ay \rangle \ \forall x, y \in H$, der zu A adjungierte Operator. Es gilt $A^* \in L(H)$, genauer hat man sogar $\|A\| = \|A^*\|$. Es handelt sich dabei um einen Spezialfall der dualen Abbildung $A' : F' \to E'$, def. durch $A'y[x] := y[Ax]$, wenn $A : E \to F$ eine stetige lineare Abbildung ist. Ein Operator $U \in L(H)$ heißt unitär, wenn U invertierbar ist und wenn gilt, dass $U^* = U^{-1}$.

(2) Die Situation auf dem $\mathbb{R}^n$ ist etwas komplizierter als auf dem Torus, der endliches Lebesgue-Maß hat. Auf $\mathbb{T}$ oder auch $\mathbb{T}^n$ gilt $L^2(\mathbb{T}^n) \subset L^1(\mathbb{T}^n)$ wegen der Hölderschen Ungleichung, allgemeiner sogar $L^q(\mathbb{T}^n) \subset L^p(\mathbb{T}^n) \subset L^1(\mathbb{T}^n)$, wenn $1 \le p \le q$. Das hat zur Folge, dass die Fouriertransformation

$$\mathcal{F} : f \mapsto (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}^n} \quad L^1(\mathbb{T}^n) \to \ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$$

$$\text{mit} \quad \hat{f}(k) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{-ixk} f(x)\,dx$$

die Definition von $\mathcal{F}f$ für $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ bereits enthält.

Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \setminus L^1(\mathbb{R}^n)$ ist das Integral

$$\int e^{-ix\xi} f(x)\, dx$$

nicht erklärt und man muß die Fouriertransformation mit Hilfe einer Fortsetzung erklären. Dazu (Rekapitulation):

Dichte Teilräume von $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$:

(i) Treppenfunktionen (bekannt aus Analysis III, haben wir verschiedentlich verwendet, ergibt sich aus der Konstruktion des Integrals nach einem Maß!)

$$T := \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \exists N \in \mathbb{N},\ \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C} \text{ und } A_1, \dots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$
$$\text{mit } \lambda^n(A_i) < \infty, \text{ so daß } f = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \chi_{A_i} \}$$

Lebesgue-Maß

ist ein dichter linearer Teilraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$, sofern $1 \le p < \infty$.

(ii) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) := \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ und } \operatorname{supp}(f)$ ist kompakt $\}$

unendlich oder besser beliebig oft diff-bar

ist ebenfalls ein dichter linearer Teilraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$.

Bsp.: $\varphi_0(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases} \quad \leadsto \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$

(Letzteres zu zeigen ist eine der unbeliebteren Übungen zur Analysis I) Hieraus konstruiert man $\varphi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$:

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & \text{für } |t| < 1 \\ 0 & \text{für } |t| \ge 1 \end{cases}$$

(Beachte $\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} = \frac{1+t+1-t}{(1+t)(1-t)} = \frac{2}{1-t^2}$ und daher gilt für t mit $|t|<1$:

$$e^{-\frac{1}{1-t^2}} = e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{1-t}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+t}} = e^{-\frac{1}{2(1-t)}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1+t)}}$$

. Daher "vererbt" sich die Regularitätseigenschaft von φ_0 auf φ_1. Dass φ_1 kompakten Träger hat, ist offensichtlich.)

euklidische Norm

Schließlich setzt man für $x\in\mathbb{R}^n$: $\varphi(x) = \varphi_1(|x|)$ und hat eine erste $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$-Funktion konstruiert.

Weiter setzt man $c := \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ und $\psi(x) := \frac{1}{c}\cdot\varphi(x)$.

Dann ist $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\subset L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$.

Hieraus baut man in der üblichen Weise eine approximative Einheit, man setzt also für $\varepsilon>0$

$$\psi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\cdot\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \text{ dann } \psi_\varepsilon\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\ \forall\varepsilon>0.$$

Ist nun g eine beschränkte Funktion mit kompaktem Träger, so ist

$$g_\varepsilon := g*\psi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

(wohldef. nach der Youngschen Ungleichung. Ist $\operatorname{supp}(g) \subset B_R(0)$, so ist $\operatorname{supp}(g_\varepsilon)\subset B_{R+\frac{1}{\varepsilon}}(0)$. Beliebige Ableitungen können in der Faltung auf den "glatten Faktor" ψ_ε abgewälzt werden!)

Bez. Die Approximative Einheit $(\psi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ wird auch nach Kurt Friedrich ($\to$ Mitarbeiter von Courant) als Friedrich's Mollifier bezeichnet.

Es bleibt einzusehen, daß $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tatsächlich einen dichten Teilraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$ ergibt. Dazu seien $p \in [1,\infty)$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fixiert und $\delta > 0$ vorgegeben. Dann existiert nach (i) eine Treppenfunktion $t \in T$ mit $\|f - t\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\delta}{2}$. Da $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ eine a.E. ist, können wir $\varepsilon > 0$ hinreichend klein wählen, so daß $\|t - t*\varphi_\varepsilon\| \leq \frac{\delta}{2}$. Dann ist $t*\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und nach der Dreiecksungleichung $\|f - t*\varphi_\varepsilon\| \leq \delta$. $\Rightarrow$ Beh.

(iii) Zum Beweis des Plancherel-Theorems benötigen wir den Hilfsraum

$$L := \{ f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \}$$

derjenigen Funktionen, für die die Fourierinversionsformel gilt. Wir überlegen uns kurz, dass $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L$ gilt, dann folgt, dass auch L ein dichter linearer Teilraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist.

Für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ gelten $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $(-\Delta)^m f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, wobei $m \in \mathbb{N}$ beliebig ist. Wählen wir $m \geq \frac{n}{2}$, haben wir

$$(1 + (-\Delta)^m) f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (1 + |\xi|^{2m}) \hat{f} \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \int |\hat{f}(\xi)| \, d\xi \leq \int \underbrace{(1+|\xi|^{2m}) |\hat{f}(\xi)|}_{\leq M} (1 + |\xi|^{2m})^{-1} \, d\xi < \infty$$

Also $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, d.h. $f \in L$.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum Beweis von Satz 3.1.

Bew. von Satz 3.1: Nach der Inversionsformel gilt für $g \in L$:

$$\hat{\hat{\bar{g}}}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-ix\xi}\, \bar{\hat{g}}(\xi)\, d\xi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \overline{\int e^{+ix\xi} \hat{g}(\xi)\, d\xi} = \bar{g}(x)$$

Mit Lemma 1.5 (2) (mit $A = E_n$) folgt für g wie oben und $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\int \hat{f}(\xi)\, \bar{\hat{g}}(\xi)\, d\xi = \int f(x)\, \hat{\bar{\hat{g}}}(x)\, dx = \int f(x)\, \bar{g}(x)\, dx \quad (*)$$

und insbesondere haben wir für $g \in L$:

$$\| \hat{g} \|_{L^2_\xi} = \| g \|_{L^2_x}, \text{ d.h.}$$

$$\mathcal{F}: L^2 \underset{\text{dicht}}{\supset} L \cap L^2 \longrightarrow L^2,\ g \mapsto \hat{g}$$

ist eine Isometrie und erlaubt eine eindeutige stetige Fortsetzung. Genauer: Ist $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, wählen wir eine Folge $(f_n)_n$ in L mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^2_x(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\| \hat{f}_n - \hat{f}_m \|_{L^2_\xi} = \| f_n - f_m \|_{L^2_x} \to 0$ $(n, m \to \infty)$, d.h. $(\hat{f}_n)_n$ eine Cauchy-Folge in L^2_ξ und es existiert

$$\mathcal{F}_2 f := \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n$$

Sind nun $f, h \in L^2_x$ mit approximierenden Folgen $(f_n)_n$ und $(h_n)_n$ in L, so folgt

$$\langle \mathcal{F}_2 f, \mathcal{F}_2 h \rangle_{L^2_\xi} = \langle \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n, \lim_{m\to} \hat{h}_m \rangle$$

$$= \lim_{n,m\to\infty} \langle \hat{f}_n, \hat{h}_m \rangle \underset{(*)}{=} \lim_{n,m\to\infty} \langle f_n, h_m \rangle = \langle f, h \rangle,$$

d.h. $\langle f, \mathcal{F}_2^* \mathcal{F}_2 h \rangle = \langle f, h \rangle \ \forall f, h \in L^2$. Also ist $\mathcal{F}_2^* \mathcal{F}_2 = \mathrm{Id}$, was bedeutet, dass $\mathcal{F}_2$ unitär ist.

Es bleibt z.z., daß $\mathcal{F}_2|_{L^1\cap L^2} = \mathcal{F}$. Dazu sei $f\in L^1\cap L^2$. Dann ist (6)

für alle $g \in L\cap L^2$:

$$\langle \mathcal{F}_2 f - \hat{f}, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \hat{f_n} - \hat{f}, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \widehat{f_n - f}, g\rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int \widehat{f_n - f}(\xi)\bar{g}(\xi)d\xi$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int (f_n - f)(x)\hat{\bar{g}}(x)dx \underset{C.S}{\le} \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^2}\|g\|_{L^2} = 0.$$

Lemma 1.5 (2)

Also $\langle \mathcal{F}_2 f - \hat{f}, g\rangle = 0 \ \forall g\in L^2\cap L$ und damit $\mathcal{F}_2 f = \hat{f}$. $\square$

(Ab jetzt: Bez. $\mathcal{F}$ oder $\hat{}$ für $\mathcal{F}_2$!)

<u>Folgerung</u> (Ungleichung von Hausdorff-Young): Es sei $f\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ und $p\in[1,2]$. Dann gilt

$$\|\hat{f}\|_{L^{p'}} \le \left((2\pi)^{-n/2}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}\|f\|_{L^p}.$$

Bew.: Folgt durch Riesz-Thorin-Interpolation zwischen

$$\|\hat{f}\|_\infty \le (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^1} \quad (M_0 = (2\pi)^{-n/2})$$

und dem Plancherel-Thm, wonach

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2 \qquad (M_1 = 1).$$

Interpolation ergibt $\|\hat{f}\|_q \le M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|f\|_p$, wobei $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2}$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2}$, also $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, d.h. $q = p'$ (konjugierter Hölder-Exponent) und $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 1-\theta$, woraus sich die Behauptung über die Operator-Norm ergibt.

Weiterführende Fragestellung: Wie definiert man $\mathcal{F}f$ für $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, wenn $p\in(2,\infty]$? $\to$ Schrödingergleichung!

Im folgenden soll eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$ aus Eigenfunktionen der Fouriertransformation konstruiert werden. Dazu definieren wir die Operatoren

$$b := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)$$ — Multiplikator — Absteige-

$$b^* := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)$$ Aufsteige- (formal adjungiert zu b)

$$N := b^* b$$ Besetzungszahl-

} Operatoren ($\to$ QM, (Dirac's Behandlung des harmonischen Oszillators)

und führen die Hermite-Funktionen $(H_n)_{n\geq 0}$ ein:

Def.: Die Funktionen $H_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \geq 0)$, def. durch

$$H_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\, e^{-x^2/2} \quad \text{und, für } n \geq 1: \quad H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\, b^* H_{n-1}(x)$$

werden als Hermite-Funktionen bezeichnet.

Bem. Die Hermite-Funktionen haben die Gestalt

$$H_n(x) = p_n(x) \cdot e^{-x^2/2},$$

wobei p_n ein Polynom n-ten Grades ist. Sie entstehen durch Gram-Schmidt-Orthonormalisierung der Monome im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$. Die nächsten H.-Funktionen sind

$$H_1(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} \sqrt{2}\, x \cdot e^{-x^2/2}$$

$$H_2(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} \sqrt{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) e^{-x^2/2}$$

$$H_3(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x^3 - \frac{3x}{2}\right) e^{-x^2/2}$$

(Man liest ab: p_n abwechselnd gerade bzw. ungerade.)

Lemma 3.1: Für die Hermitefunktionen H_n gelten

(1) $N H_n = n H_n$,

(2) $\langle H_n, H_m \rangle = \delta_{nm}$.

Bew.: (1) per Ind. über n, beginnend mit

$n=0$: Es ist $b H_0 = c \cdot (x + \frac{d}{dx}) e^{-x^2/2} = 0$ und damit

auch $N H_0 = b^* b H_0 = 0$.

$n-1 \to n$: $N H_n = N \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} b^* H_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} b^* b b^* H_{n-1}$. Nun ist

$b b^* - b^* b = \frac{1}{2} \{ (x + \frac{d}{dx})(x - \frac{d}{dx}) - (x - \frac{d}{dx})(x + \frac{d}{dx}) \} = \frac{1}{2} (Id - (-Id)) = Id$

und daher

$b b^* = Id + b^* b = N + Id$. Einsetzen ergibt

$$N H_n = \frac{1}{\sqrt{n}} b^* (N + Id) H_{n-1} \overset{I.V.}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} b^* (n-1+1) H_{n-1} = n H_n .$$

(2) (i) Für $n \neq m$ haben wir nach (1)

$$n \langle H_n, H_m \rangle = \langle N H_n, H_m \rangle = \langle b^* b H_n, H_m \rangle = \langle b H_n, b H_m \rangle$$

$$= \ldots \text{(Rechnung rückwärts)} \ldots = m \langle H_n, H_m \rangle .$$

Wg. $n \neq m$ folgt $\langle H_n, H_m \rangle = 0$.

(ii) Auch $\| H_n \|^2 = 1$ zeigen wir per Induktion über n.

$n = 0$: $\int H_0^2(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx = 1$ (bekanntes Gauss-Integral).

$n-1 \to n$: $n = n \| H_{n-1} \|^2 = n \langle H_{n-1}, H_{n-1} \rangle = \langle (N + Id) H_{n-1}, H_{n-1} \rangle$

$$\underset{s.o.}{=} \langle b b^* H_{n-1}, H_{n-1} \rangle = \langle b^* H_{n-1}, b^* H_{n-1} \rangle = n \cdot \| H_n \|^2 .$$

$b^* H_{n-1} \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{n} H_n$ $\square$

Der Zusammenhang zur Fouriertransformation wird hergestellt durch das folgende

<u>Lemma</u> 3.2: Die n-te Hermite-Funktion H_n ist eine Eigenfunktion der Fouriertransformation zum Eigenwert $(-i)^n$.

Bew. per Induktion über n. Der Induktionsanfang für $n=0$ ist $\mathcal{F} H_0 = \mathcal{F}\, \sqrt{\pi}^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{-x^2/2} = H_0$ (Bsp. 1.2).

$n-1 \to n$: $\mathcal{F} H_n(\xi) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} b^* H_{n-1}\right)(\xi)$

$$= \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx}\right) H_{n-1}\right)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\left(\frac{d}{d\xi} - \xi\right) \mathcal{F} H_{n-1}(\xi)$$

$$\underset{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{\sqrt{2n}} (-i) \left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right) (-i)^{n-1} H_{n-1}(\xi) = (-i)^n \frac{b^*}{\sqrt{n}} H_{n-1}(\xi)$$

$$= (-i)^n H_n(\xi).$$ □

<u>Satz</u> 3.2: Die Hermite-Funktionen $(H_n)_{n \geq 0}$ bilden eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$.

<u>Bew.</u>: Nach Lemma 3.1 (2) ist nur noch die Vollständigkeit zu zeigen. Dazu bemerken wir das folgende Kriterium: Ist $(e_n)_{n \in I}$ ein ONS in einem Hilbertraum H, so daß gilt

$$\langle f, e_n \rangle = 0 \ \forall n \in I \Rightarrow f = 0.$$

Dann ist $(e_n)_{n \in I}$ eine Orthonormalbasis. (Vgl. Meise-Vogt, 11.8 und 12.4. Dieses Kriterium gilt in Prähilberträumen i. allg. nicht, ist also nicht trivial.)

Es sei also $\langle f, H_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$. Wir setzen

$$g_n(x) = x^n e^{-x^2/2}.$$

Dann ist $g_n \in \langle H_0, \dots, H_n \rangle$, also auch $\langle f, g_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Für $N \in \mathbb{N}$ und $\xi \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$0 = \langle f, \sum_{n=0}^{N} \frac{(i\xi)^n}{n!} g_n \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \sum_{n=0}^{N} \frac{(-ix\xi)^n}{n!} e^{-x^2/2} dx$$

Der Integrand wird majorisiert durch $|f(x)| e^{|x\xi|} e^{-x^2/2}$, wobei ξ fest und x die Integrationsvariable ist. Daher ergibt der Lebesguesche Konvergenzsatz:

$$0 = \lim_{N \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \sum_{n=0}^{N} \frac{(-ix\xi)^n}{n!} e^{-x^2/2} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-ix\xi)^n}{n!} e^{-x^2/2} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-ix\xi} \cdot e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}\, \hat{g}(\xi)$$

für $g(x) = f(x) \cdot e^{-x^2/2}$. Da $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ injektiv ist, folgen $g = 0$ und $f = 0$. $\square$

Folgerung: Für $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$ sei

$$H_k(x) = \prod_{j=1}^{n} H_{k_j}(x_j) \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Dann ist $(H_k)_{k \in \mathbb{N}_0^n}$ eine ONB von $L^2(\mathbb{R}^n)$ aus Eigenfunktionen der Fouriertransformation zu Eigenwerten $(-i)^{|k|}$, dabei $|k| = \sum_{j=1}^{n} k_j$.